

Численное моделирование воздействия плоской упругой волны на искусственно выделенную прямоугольную область

И. МИРЗАЕВ^{1,2,*}, С. М. ГАЙНАЗАРОВ³

¹Ташкентский государственный транспортный университет, 100067, Ташкент, Узбекистан

²Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН Республики Узбекистан, 100125, Ташкент, Узбекистан

³Национальный университет Узбекистана, 100174, Ташкент, Узбекистан

*Контактный автор: Ибрахим Мирзаев, e-mail: ibrakhim.mir@mail.ru

Поступила 13 мая 2025 г., доработана 03 июня 2025 г., принята в печать 11 июня 2025 г.

При численном моделировании поведения подземных объектов в безграничной грунтовой среде на волновые воздействия требуется ограничение исследуемой области. Возникает необходимость обеспечения неотражения как внешних, так и внутренних волн на границах исследуемой области. Кроме того, фронт падающей волны по отношению к исследуемой области может быть под углом, что требует дополнительных преобразований для правильного расчета воздействий на объект. В статье впервые представлены точные условия прозрачности границ для плоских упругих волн с учетом фронта падающей волны под любым углом. На основе предложенной математической модели выполнено исследование поведения обделок при воздействии продольной волны, падающей под различными углами. Численное решение динамической задачи осуществлено методом конечных элементов и методом Бате по времени. В качестве примера исследованы круговые и прямоугольные бетонные обделки при воздействии плоских продольных волн. Приведенные результаты показывают хорошее качество условий прозрачности на искусственных границах при любых углах падения волны, что позволяет проводить достоверные исследования процессов воздействия волн на подземные сооружения глубокого заложения в случае плоской деформации.

Ключевые слова: упругая среда, обделка, прозрачные границы, распространение волны, метод конечных элементов, метод интегрирования Бате.

Цитирование: Мирзаев И., Гайназаров С.М. Численное моделирование воздействия плоской упругой волны на искусственно выделенную прямоугольную область. Вычислительные технологии. 2025; 30(4):54–65. DOI:10.25743/ICT.2025.30.4.006.

Введение

Обделка — строительная конструкция, которая возводится вокруг горной выработки при строительстве подземного сооружения. При численном расчете обделок в бесконечной плоской среде в случае динамических воздействий требуется переход к искусственно ограниченной области. При этом одним из важных условий является обеспечение

прозрачности границ расчетной области независимо от угла падения волны. В работе [1] впервые предложены формулы зависимости напряжений от скоростей частиц для плоских волн на искусственных границах. Следует отметить, что эти условия и их модификации являются приближенными условиями на границах. Они являются точными в случае одномерной задачи, а в плоской задаче дают хорошие результаты, когда нормаль к фронту волны с искусственной границей составляет прямой угол. В работе [2] для системы сооружение – основание использован учет волнового уноса энергии через неотражающую границу посредством использования условий [1] с применением метода конечных элементов (МКЭ). В статье [3] также использован метод учета волнового уноса энергии при движении железнодорожного состава. В работе [4] исследована неоднородная плоская задача теории упругости с применением МКЭ в расчетах на распространение вибрации при прохождении поездов метро в параллельных тоннелях. В статье [5] предложено использование фиктивной области со специальными свойствами поглощения волн, что позволяет решить проблемы прозрачности границ области. В этой статье связанная задача, включающая внутреннюю подобласть и поглощающие слои, реализуется через гетерогенные асинхронные интеграторы времени, которые позволяют обрабатывать поглощающие слои с помощью явной центрально-разностной схемы. Представлен эталон для трехмерных явных асинхронных поглощающих слоев для моделирования неограниченных областей с помощью стандартного метода конечных элементов на основе перемещений.

В статье [6] представлен новый метод инверсии для реконструкции сложного, неогерентного падающего волнового поля SH в области, которая усечена поглощающим волну граничным условием, с использованием метода ограниченной оптимизации на основе уравнения в частных производных. В статье [7] проведен обзор работ, в которых представлены различные модели, реализующие условия неотражения волн на границах ограниченной области. В [8] предложена новая процедура учета влияния свободного поля в модели сейсмического взаимодействия грунта и конструкции (SSSI) при использовании восьмиузловых конечных элементов, ограниченных совместимыми поглощающими бесконечными элементами. В статье [9] для одномерного волнового уравнения предложен метод получения прозрачных граничных условий и показана его численная реализация с использованием метода конечных разностей. Предложенный метод распространяется на трехмерное волновое уравнение с радиальной симметрией.

В статье [10] выполнен статический расчет напряженного состояния различных обделок тоннеля метрополитена. Проведен анализ численных результатов в зависимости от глубины заложения тоннеля. В работе [11] рассмотрен расчет водопропускного тоннеля в грунте, усиленного бетоном с трех сторон, и выполнен частотный анализ с применением метода конечных элементов. В работе [12] предложены точные неотражающие граничные условия для внешних волновых уравнений с использованием на границах интегральных уравнений. В работе [13] исследованы одномерные волновые задачи на сейсмические воздействия. В работе [14] впервые были представлены точные условия прозрачности границ, когда фронт внешней плоской волны составляет нуль и 90° с нижней границей, проведен анализ воздействия сейсмической волны, заданной велосигграммой, на обделку разной глубины залегания в грунтовой среде.

В работе [15] приведены точные условия неотражения волн на искусственных границах, на основе которых выполнен анализ поведения пары обделок в грунте при воздействии продольной и поперечной гармонических волн. При недостаточно правильном моделировании условий неотражения волн на искусственных границах наблюдается ди-

фракция волн, что приводит к появлению паразитных осцилляций, нарушающих процесс распространения волн внутри ограниченной области. В статье [16] утверждается, что при падении волны, нормаль к фронту которой составляет с нормалью искусственной границы более 15° , возникают нежелательные дифракционные процессы. В [17, 18] рассмотрены основы метода конечных элементов и неявные конечно-разностные схемы решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений и выполнен анализ их устойчивости. В [19] описана инструкция по использованию инструментального программного средства FreeFem++.

В результате анализа литературы до настоящего времени не встретились работы, которые бы точно разрешали условия неотражения волн на границах в случае падения плоской упругой волны под углом. В настоящей статье впервые выведены точные граничные условия прозрачности в случае падающей под уклоном плоской упругой волны на искусственно ограниченную область. Представлены результаты воздействия плоской продольной волны на различные обделки в грунте.

1. Постановка задачи и методы

Пусть на прямоугольную область, выделенную из неограниченной плоскости, падает плоская упругая волна, линия фронта которой имеет угол α к нижней стороне искусственной границы (рис. 1).

Распространение волны в указанной области определяется слабой формой уравнения движения [17]:

$$\int_{\Omega} \left[\lambda \operatorname{div}(\mathbf{u}) \operatorname{div}(\delta \mathbf{u}) + 2\mu \varepsilon^T \delta \varepsilon - (\mathbf{r} - \rho \ddot{\mathbf{u}} - c \dot{\mathbf{u}}) \delta \mathbf{u} \right] d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{P} \delta \mathbf{u} d\Gamma = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{P}$ — вектор поверхностных усилий на единицу площади на границе области; ρ — плотность материала; c — параметр вязкости среды и r — вектор объемных сил; $\mathbf{u}$ — вектор перемещений; ε — тензор деформаций; λ и μ — коэффициенты Ляме.

Решение интегрального уравнения (1) определяет динамическую картину распространения заданной волны в прямоугольной области. Применяя к (1) метод частичной дискретизации конечными элементами [17], получим систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

$$M\ddot{\mathbf{U}} + C\dot{\mathbf{U}} + K\mathbf{U} = \mathbf{R} \quad (2)$$

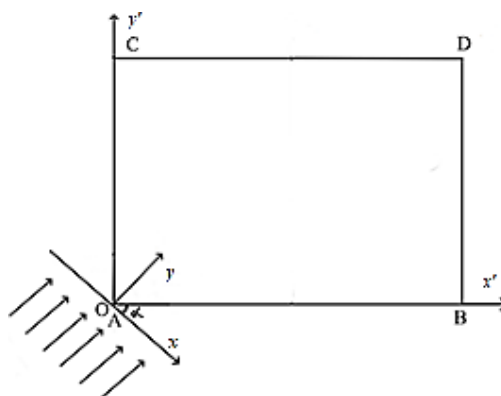


Рис. 1. Падение волны под углом на ограниченную область

Fig. 1. Wave incidence at an angle onto a limited area

с начальными условиями

$$\mathbf{U} = 0, \quad \dot{\mathbf{U}} = 0 \quad \text{при } t = 0, \quad (3)$$

где M, C, K — соответственно матрицы масс, демпфирования и жесткостей; $\mathbf{U}$ — вектор искомых узловых перемещений; $\mathbf{R}$ — вектор нагрузок, который определяется условиями на границе, представленными ниже.

Определим условия на границах. Рассмотрим падающую на прямоугольную область плоскую волну, скорости частиц которой задаются функцией времени в виде

$$v_p = f(t_p), \quad v_s = f(t_s), \quad (4)$$

где f_p, f_s — заданные функции для продольной и поперечной волн, в частности, эти функции могут задаваться оцифрованной записью волнограммы землетрясения [13]; t_p, t_s — времена появления продольной и поперечной волн в точках наблюдения, которые зависят от координат точек вдоль искусственных границ.

Для плоской задачи соотношения Коши имеют вид

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}. \quad (5)$$

Из решения задачи о распространении плоской продольной волны (4) и соотношения Коши (5) определяем связь между деформациями и скоростями частиц в плоской продольной волне, идущей в направлении оси y :

$$\varepsilon_{yy} = -v_p/c_p, \quad \varepsilon_{xx} = 0, \quad \varepsilon_{xy} = 0, \quad (6)$$

а также в случае поперечной волны

$$\varepsilon_{yy} = 0, \quad \varepsilon_{xx} = 0, \quad \varepsilon_{xy} = -v_s/c_s, \quad (7)$$

где $c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ и $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$ — соответственно скорости распространения продольной и поперечной волн.

Как известно, закон Гука для плоской деформации между напряжениями и деформациями имеет вид

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_{yy}, \quad \sigma_{yy} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{yy} + \lambda\varepsilon_{xx}, \quad \sigma_{xy} = \mu\varepsilon_{xy}. \quad (8)$$

Подставляя (6) в (8), получим напряжения в падающей плоской продольной волне

$$\sigma_{xx} = -\lambda v_p/c_p, \quad \sigma_{yy} = -c_p \rho v_p, \quad \sigma_{xy} = 0. \quad (9)$$

Затем, подставляя (7) в (8), получим напряжения в падающей плоской поперечной волне

$$\sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = -c_s \rho v_s.$$

При переходе от одной декартовой системы координат (xy) к другой $(x'y')$ напряжения в новой системе координат определяются на основе преобразований [20]. С учетом (9) для плоской продольной волны имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{x'x'} &= -\frac{\lambda v_p}{c_p} \cos^2 \alpha - c_p \rho v_p \sin^2 \alpha, & \sigma_{y'y'} &= -\frac{\lambda v_p}{c_p} \sin^2 \alpha - c_p \rho v_p \cos^2 \alpha, \\ \sigma_{x'y'} &= -\left(c_p \rho v_p - \frac{\lambda v_p}{c_p}\right) \sin \alpha \cdot \cos \alpha. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь α — угол между фронтом волны и осью Ox' , причем $0 \leq \alpha \leq \pi/2$.

Для случая падения плоской поперечной волны

$$\sigma_{x'x'} = -2c_s \rho v_s \sin \alpha \cos \alpha, \quad \sigma_{y'y'} = 2c_s \rho v_s \sin \alpha \cos \alpha, \quad \sigma_{x'y'} = -c_s \rho v_s (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha).$$

Далее рассмотрим только случай падающей плоской продольной волны. В данной статье в качестве функции формы волны используется нарастающая на фронте гармоническая волна с заданной частотой по следующему закону:

$$f(t_p) = A_n \cos(2\pi\omega t_p) H(t_p), \quad A_n = \begin{cases} At_p/t_0, & \text{если } t_p < t_0, \\ A & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где A — амплитуда скорости частицы; t_0 — интервал нарастания; ω — частота колебаний, Гц; $H(t_p)$ — функция Хэвисайда.

Распространение заданной волны на границах искусственной области учитывается во времени запаздывания продольной волны (в случае поперечной волны параметр c_p заменяется на c_s) и в $H(t_p)$.

Время запаздывания продольной волны

$$t_p = \begin{cases} t_{AB} = t - \frac{x' \sin \alpha}{c_p} & \text{на границе } AB, \\ t_{AC} = t - \frac{y' \cos \alpha}{c_p} & \text{на границе } AC, \\ t_{CD} = t - \frac{|AC| \cos \alpha + x' \sin \alpha}{c_p} & \text{на границе } CD, \\ t_{BD} = t - \frac{y' \cos \alpha + |AB| \sin \alpha}{c_p} & \text{на границе } BD, \end{cases}$$

где $|AB|$, $|AC|$ — длина соответствующих границ.

Учитывая, что полная скорость частиц на искусственной границе области состоит из суммы скоростей частицы в заданной волне v_p и в идущей к границе изнутри области волне v' , напряжения на границах области выражаем через скорости частиц и деформации. Напряжения на границе AB состоят из суммы двух напряжений: в падающей волне (4) и волне, возникшей внутри расчетной области.

Напряжения σ' от прихода к границе изнутри волны в пределах каждого конечного элемента можно рассмотреть как плоскую волну и выразить через соответствующие скорости частиц v' и деформации ε' :

$$\begin{aligned} \sigma'_{x'x'} &= \pm \frac{\lambda + 2\mu}{c_p} v'_{x'} + \lambda \frac{\partial u'_{y'}}{\partial y'} = \pm c_p \rho v'_{x'} + \lambda \frac{\partial u'_{y'}}{\partial y'}, \\ \sigma'_{y'y'} &= \pm \frac{\lambda + 2\mu}{c_p} v'_{y'} + \lambda \frac{\partial u'_{x'}}{\partial x'} = \pm c_p \rho v'_{y'} + \lambda \frac{\partial u'_{x'}}{\partial x'}, \quad \sigma'_{x'y'} = \pm \frac{\mu}{c_s} v'_{x'}. \end{aligned} \tag{11}$$

Знак $\pm$ выбирается в зависимости от того, к какой границе подходит внутренняя волна: на левой и нижней границах знак положительный, а на правой и верхней — отрицательный.

На основе соотношений (10) и (11) получим:

напряжения на нижней границе AB

$$\sigma'_{y'y'} = c_p \rho (\dot{u}_{y'} - v_p \cos \alpha - v_p \cos^2 \alpha) + \lambda \frac{\partial u_{x'}}{\partial x'}, \quad P_{y'} = -\sigma_{y'y'}, \quad (12)$$

$$\sigma'_{x'y'} = c_s \rho (\dot{u}_{x'} - v_p \sin \alpha) - \left(c_p \rho - \frac{\lambda}{c_p} \right) v_p \sin \alpha \cos \alpha, \quad P_{x'y'} = -\sigma_{x'y'}, \quad (13)$$

аналогично, на верхней границе CD

$$P_{y'} = \sigma_{y'y'} = c_p \rho (-\dot{u}_{y'} + v_p \cos \alpha - v_p \cos^2 \alpha) + \lambda \frac{\partial u_{x'}}{\partial x'}, \quad (14)$$

$$P_{x'y'} = \sigma_{x'y'} = c_s \rho (-\dot{u}_{x'} + v_p \sin \alpha) - \left(c_p \rho - \frac{\lambda}{c_p} \right) v_p \sin \alpha \cos \alpha, \quad (15)$$

на левой границе AC

$$\sigma_{x'x'} = c_p \rho (\dot{u}_{x'} - v_p \sin \alpha - v_p \sin^2 \alpha) + \lambda \frac{\partial u_{y'}}{\partial y'}, \quad P_{x'} = -\sigma_{x'x'}, \quad (16)$$

$$\sigma_{x'y'} = c_s \rho (\dot{u}_{y'} - v_p \cos \alpha) - \left(c_p \rho - \frac{\lambda}{c_p} \right) v_p \sin \alpha \cos \alpha, \quad P_{x'y'} = -\sigma_{x'y'}, \quad (17)$$

на правой границе BD

$$P_{x'} = \sigma_{x'x'} = c_p \rho (-\dot{u}_{x'} + v_p \sin \alpha - v_p \sin^2 \alpha) + \lambda \frac{\partial u_{y'}}{\partial y'}, \quad (18)$$

$$P_{x'y'} = \sigma_{x'y'} = c_s \rho (-\dot{u}_{y'} + v_p \cos \alpha) - \left(c_p \rho - \frac{\lambda}{c_p} \right) v_p \sin \alpha \cos \alpha. \quad (19)$$

Для решения системы уравнений (2) с начальными условиями (3) и граничными условиями (12)–(19) применяется неявный конечно-разностный метод Бате [18].

2. Результаты исследования

Рассмотрим задачу распространения плоской продольной упругой волны в прямоугольной области 50×50 м, которая представляет собой однородный грунт с механическими характеристиками: модуль Юнга $E = 150$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$ и плотность $\rho = 1850$ кг/м³. В центре заданной области расположены разного вида обделки. Одна обделка представляет собой железобетонное кольцо с внешним диаметром 10 м

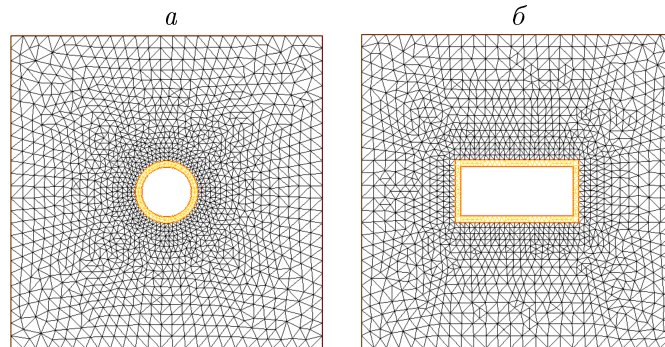


Рис. 2. Конечно-элементная сетка области с круговой (а) и прямоугольной (б) обделками
Fig. 2. Finite element mesh of the area with circular (a) and rectangular (b) linings

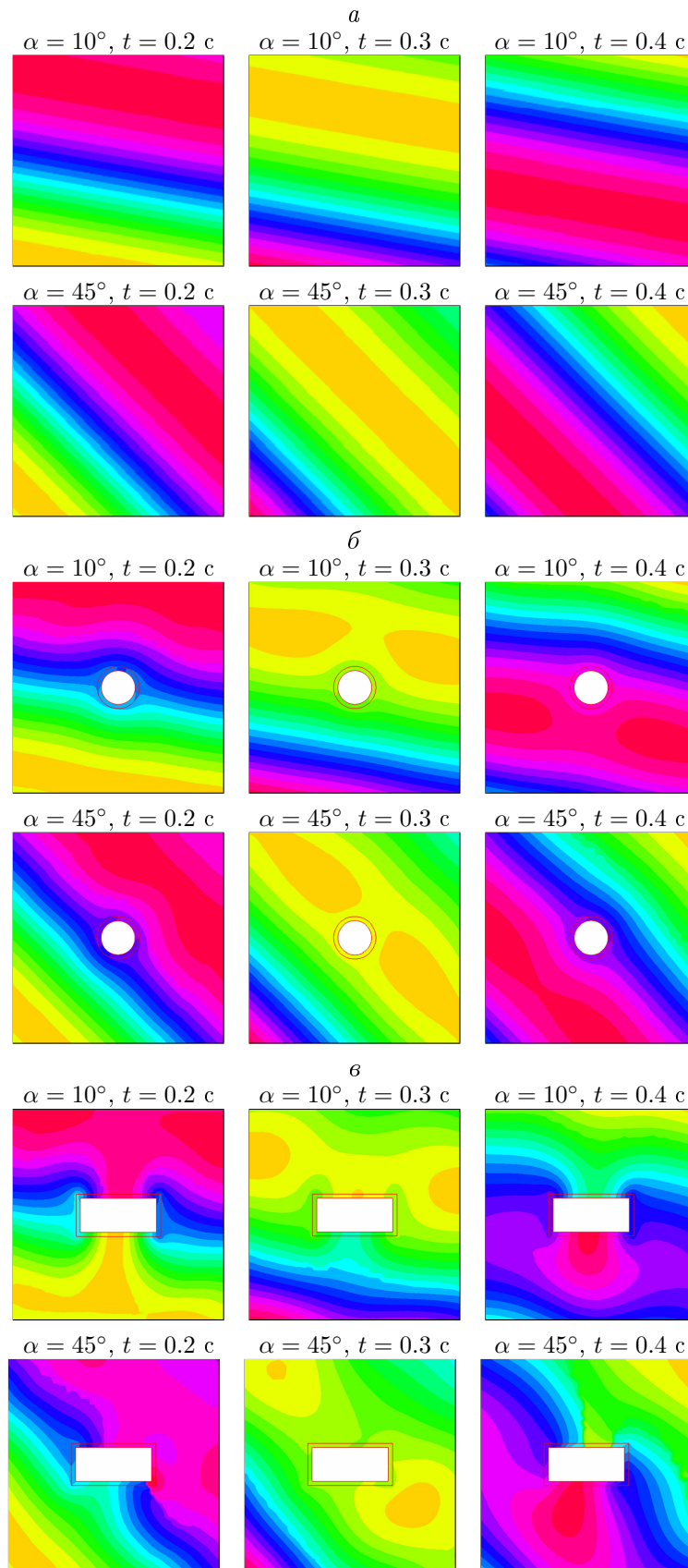


Рис. 3. Распространение продольной плоской волны в прямоугольной области (*a*) и вокруг круговой (*б*) и прямоугольной (*в*) обделок в моменты времени $t = 0.2, 0.3$ и 0.4 c

Fig. 3. Propagation of a longitudinal plane wave in a rectangular area (*a*) passage a circular (*б*) and rectangular (*в*) lining at times $t = 0.2, 0.3$ and 0.4 s

и толщиной 1 м с характеристиками: модуль Юнга $E = 30$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$ и плотность $\rho = 2500$ кг/м³. Вторая обделка в виде прямоугольника размером 20×10 м и толщиной 1 м имеет аналогичные механические характеристики. В расчетах приняты следующие значения параметров падающей волны: $A = 1$ м/с, $t_0 = 0.5$ с, $\omega = 3$ Гц. Задача реализована в свободно распространяемой системе программирования для МКЭ — FreeFem++ [19]. В качестве конечных элементов был использован треугольный элемент с шестью узлами со второй степенью точности аппроксимации. Структура конечно-элементной сетки с различными обделками приведена на рис. 2.

Динамический расчет проводился с шагом интегрирования 0.001 с в течение времени $t = 2$ с. На рис. 3 представлены кадры в моменты времени $t = 0.2, 0.3$ и 0.4 с. Угол наклона волны $\alpha = 10$ и 45° . На рис. 3, а приведено распределение волн в области обделок. Из рисунка видно, что волна проходит под соответствующим углом, не отражаясь от границ области.

На рис. 3, б и в приведено действие на круговую и прямоугольную обделки плоской продольной упругой волны. В первом случае видно, что волна симметрично обходит обделку, создавая некоторую дифракцию вокруг нее, во втором волна обходит ее с учетом прямоугольного контура, общая картина волнового процесса изменяется вокруг обделки.

Заключение

Получены точные условия на прозрачных границах, когда заданная плоская волна поступает в искусственно ограниченную прямоугольную область под углом к границе области. С использованием свободно распространяемой системы программирования для МКЭ FreeFem++ и метода Бате решена задача о воздействии плоской упругой волны на деформируемые включения в однородной среде. В качестве примера решены задачи о воздействии плоской продольной гармонической волны, падающей под определенным углом к нижней искусственной прозрачной границе прямоугольной области без и с включениями деформирующих объектов. Приведены результаты расчетов, показывающие хорошее качество условий прозрачности на искусственных границах, картины дифракции волны вокруг деформирующих включений различной формы в зависимости от угла падения волны. Результаты исследования показали правильность предложенной модели и адекватность распространения волны в прямоугольной области.

Список литературы

- [1] **Lysmer J., Kyhlemeyer L.** Finite dynamic model for infinite media. Journal Engineering Mechanics Division, ASCE. 1969; 95(4):859–887. DOI:10.1061/JMCEA3.0001144. Available at: <https://ascelibrary.org/doi/10.1061/JMCEA3.0001144>.
- [2] **Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z., Rumi D.F.** An assessment of dynamic behavior of the system “structure–foundation” with account of wave removal of energy. Magazine of Civil Engineering. 2013; (4):94–127. DOI:10.5862/MCE.39.10. Available at: <https://engstroy.spbstu.ru/en/article/2013.39.10>.
- [3] **Il'ichev V.A., Yuldashev S.S., Saidov S.M.** Propagation of vibration from trains in relation to track position. Soil Mechanics and Foundation Engineering. 1999; (36):55–56.

- DOI:10.1007/BF02469085. Available at: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02469085>.
- [4] **Yuldashev S.S., Karabaeva M.U.** Soil surface vibrations in the training of metro trains in parallel tunnels. *ISJ Theoretical and Applied Science*. 2020; 85(5):117–121. DOI:10.15863/TAS.2020.05.85.24. Available at: <https://www.t-science.org/arxivDOI/2020/05-85/05-85-24.html>.
 - [5] **Li S., Bruna M., Djeran-Maigrea I., Kuznetsov S.** Benchmark for three-dimensional explicit asynchronous absorbing layers for ground wave propagation and wave barriers. *Computers and Geotechnics*. 2021; (131):1–16. DOI:10.1016/j.compgeo.2020.103808. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266352X20303712>.
 - [6] **Guidio B., Jeremić B., Guidio L., Jeong C.** Passive seismic inversion of SH wave input motions in a truncated domain. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2022; (158):107263. DOI:10.1016/j.soildyn.2022.107263. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0267726122001129>.
 - [7] **Antoine X., Arnold A., Besse C., Ehrhardt M., Schaedle A.** A review of transparent and artificial boundary conditions techniques for linear and nonlinear Schrödinger equations. *Communications in Computational Physics*. 2008; 4(4):729–796. Available at: https://www.researchgate.net/publication/249994162_A_Review_of_Transparent_and_Artificial_Boundary_Conditions_Techniques_for_Linear_and_Nonlinear_Schrodinger_Equations.
 - [8] **Bakhtaoui Y.** New procedure for soil-structure interaction problems incorporating free field effects by 2D quadratic elements. *Computers and Geotechnics*. 2024; (165):105843. DOI:10.1016/j.compgeo.2023.105843. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266352X23006006>.
 - [9] **Velasco M.P., Usero D., Jiménez S., Vázquez L.** Transparent boundary conditions for the wave equation in one dimension and for a Dirac-like equation. 2014 Madrid Conference on Applied Mathematics in Honor of Alfonso Casal, *Electronic Journal of Differential Equations*, Conference. 2015; (22):117–137. Available at: <https://ejde.math.txstate.edu/conf-proc/22/v2/velasco.pdf>.
 - [10] **Miralimov M., Normuradov Sh.** Ground behavior and settlements analysis on tunnelling of shallow-buried metro in Tashkent city. V International Scientific Conference “Construction Mechanics, Hydraulics and Water Resources Engineering” (CONMECHYDRO-2023, Tashkent). *E3S Web of Conferences*. 2023; (401):01062. DOI:10.1051/e3sconf/202340101062. Available at: https://www.e3s-conferences.org/articles/e3sconf/pdf/2023/38/e3sconf_conmechhydro23_01062.pdf.
 - [11] **Ozturk K.F.** Investigation of dynamic responses of three-sided underpass culvert under nearfault and far-fault ground motions considering soil-structure interaction. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2024; (177):108446. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0267726123006917>.
 - [12] **Falletta S., Monegato G.** Exact nonreflecting boundary conditions for exterior wave equation problems. *Publications de l’Institut Mathématique nouvelle s’Erie*. 2014; (96):103–123. DOI:10.2298/PIM1410103F. Available at: <https://doiserbia.nb.rs/img/doi/0350-1302/2014/0350-13021410103F.pdf>.
 - [13] **Мирзаев И., Шомуродов Ж.Ф.** Нестационарные волны в протяженном подземном трубопроводе при сейсмическом воздействии. *Вычислительные технологии*. 2023; 28(3):10–24. DOI:10.25743/ICT.2023.28.3.002.
 - [14] **Mirzaev I., Gaynazarov S.** Effect of the depth of circular lining in an elastic medium with transparent boundary under the impact of seismic waves.

- International Conference “Ensuring Seismic Safety and Seismic Stability of Buildings and Structures, Applied Problems of Mechanics”. May 27–29 2024, Tashkent, Uzbekistan. AIP Conf. Proc. 2024: (3265). DOI:10.1063/5.0266835. Available at: <https://pubs.aip.org/aip/acp/article-abstract/3265/1/030005/3342304/Effect-of-the-depth-of-circular-lining-in-an?redirectedFrom=fulltext>.
- [15] **Mirzaev I., Gaynazarov S.** Impact of plane waves on lining in elastic medium with transparent artificial boundary. WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics. 2025; (20):31–40. DOI:10.37394/232011.2025.20.4. Available at: [https://wseas.com/journals/mechanics/2025/a085111-004\(2025\).pdf](https://wseas.com/journals/mechanics/2025/a085111-004(2025).pdf).
- [16] **Кузнецов С.В., Терентьева Е.О.** Плоская задача Лэмба: волны в эпицентральной зоне от вертикального силового источника. Акустический журнал. 2015; 61(3):387–399. Адрес доступа: https://www.researchgate.net/publication/276100584_Ploskaa_vnutrennaa_zadaca_Lemba_volny_v_epicentralnoj_zone_ot_vertikalnogo_silovogo_istocnika.
- [17] **Zienkiewicz O.C., Morgan K.** Finite elements and approximation. N.Y.: Courier Corporation; 2013: 352.
- [18] **Bathe K.J.** Finite element procedure. Second edition. Watertown, MA; 2016: 1051.
- [19] **Hecht F., Pironneau O., Le Hyaric A., Ohtsuka K.** FreeFem++. Fourth edition, Version 4.15. Paris: Laboratoire Jacques-Louis Lions, Sorbonne University; 710. Available at: <https://freefem.org>.
- [20] **Новожилов В.В.** Теория упругости. Л.: Судпромгиз; 1958: 371.

Вычислительные технологии, 2025, том 30, № 4, с. 54–65. © ФИЦ ИВТ, 2025
Computational Technologies, 2025, vol. 30, no. 4, pp. 54–65. © FRC ICT, 2025

ISSN 1560-7534
eISSN 2313-691X

MATHEMATICAL MODELLING

DOI:10.25743/ICT.2025.30.4.006

Numerical modelling of the impact of a plane elastic wave on an artificially selected rectangular domain

I. MIRZAEV^{1,2,*}, S. M. GAINAZAROV³

¹Tashkent State Transport University, 100067, Tashkent, Uzbekistan

²Institute of Mechanics and Earthquake Resistance of Structures named after M.T. Urazbaev, Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, 100125, Tashkent, Uzbekistan

³National University of Uzbekistan, 100174, Tashkent, Uzbekistan

*Corresponding author: Ibrakhim Mirzaev, e-mail: ibrakhim.mir@mail.ru

Received May 13, 2025, revised June 03, 2025, accepted June 11, 2025.

Abstract

In numerical modelling of the behavior of underground objects in an infinite soil medium to wave effects, it is necessary to limit the study area. In this case, it is necessary to ensure that both external and internal waves are not reflected at from the boundaries of the study area. In addition, front of the incident wave front may be at an angle to the study area, which requires additional transformations to correctly calculate the effects on the object. This article presents for the first time our approach presents the exact conditions of boundary transparency for plane elastic waves, taking into account the incident wave front at any angle. Based on the proposed mathematical model, the behavior of linings under the action of a longitudinal wave incident at

different angles is studied. The numerical solution of the dynamic problem is carried out using the finite element method and the Bate method in time for transient behaviour. As an example, circular and rectangular concrete linings are studied for the effect of plane longitudinal waves. The presented results show good quality robustness of transparency conditions at artificial boundaries at any angles of wave incidence, which allows reliable studies of the processes of wave action on deep underground structures in the case of plane deformation.

Keywords: elastic medium, lining, transparent boundaries, wave propagation, finite element method, Bate integration method.

Citation: Mirzaev I., Gainazarov S.M. Numerical modelling of the impact of a plane elastic wave on an artificially selected rectangular domain. Computational Technologies. 2025; 30(4):54–65. DOI:10.25743/ICT.2025.30.4.006. (In Russ.)

References

1. **Lysmer J., Kyhlemeyer L.** Finite dynamic model for infinite media. Journal Engineering Mechanics Division, ASCE. 1969; 95(4):859–887. DOI:10.1061/JMCEA3.0001144. Available at: <https://ascelibrary.org/doi/10.1061/JMCEA3.0001144>.
2. **Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z., Rumi D.F.** An assessment of dynamic behavior of the system “structure–foundation” with account of wave removal of energy. Magazine of Civil Engineering. 2013; (4):94–127. DOI:10.5862/MCE.39.10. Available at: <https://engstroy.spbstu.ru/en/article/2013.39.10>.
3. **Il'ichev V.A., Yuldashev S.S., Saidov S.M.** Propagation of vibration from trains in relation to track position. Soil Mechanics and Foundation Engineering. 1999; (36):55–56. DOI:10.1007/BF02469085. Available at: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02469085>.
4. **Yuldashev S.S., Karabaeva M.U.** Soil surface vibrations in the training of metro trains in parallel tunnels. ISJ Theoretical and Applied Science. 2020; 85(5):117–121. DOI:10.15863/TAS.2020.05.85.24. Available at: <https://www.t-science.org/arxivDOI/2020/05-85/05-85-24.html>.
5. **Li S., Bruna M., Djeran-Maigrea I., Kuznetsov S.** Benchmark for three-dimensional explicit asynchronous absorbing layers for ground wave propagation and wave barriers. Computers and Geotechnics. 2021; (131):1–16. DOI:10.1016/j.compgeo.2020.103808. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266352X20303712>.
6. **Guidio B., Jeremić B., Guidio L., Jeong C.** Passive seismic inversion of SH wave input motions in a truncated domain. Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 2022; (158):107263. DOI:10.1016/j.soildyn.2022.107263. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0267726122001129>.
7. **Antoine X., Arnold A., Besse C., Ehrhardt M., Schaedle A.** A review of transparent and artificial boundary conditions techniques for linear and nonlinear Schrödinger equations. Communications in Computational Physics. 2008; 4(4):729–796. Available at: https://www.researchgate.net/publication/249994162_A_Review_of_Transparent_and_Artificial_Boundary_Conditions_Techniques_for_Linear_and_Nonlinear_Schrodinger_Equations.
8. **Bakhtaoui Y.** New procedure for soil-structure interaction problems incorporating free field effects by 2D quadratic elements. Computers and Geotechnics. 2024; (165):105843. DOI:10.1016/j.compgeo.2023.105843. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266352X23006006>.
9. **Velasco M.P., Usero D., Jiménez S., Vázquez L.** Transparent boundary conditions for the wave equation in one dimension and for a Dirac-like equation. 2014 Madrid Conference on Applied Mathematics in Honor of Alfonso Casal, Electronic Journal of Differential Equations, Conference. 2015; (22):117–137. Available at: <https://ejde.math.txstate.edu/conf-proc/22/v2/velasco.pdf>.
10. **Miralimov M., Normuradov Sh.** Ground behavior and settlements analysis on tunnelling of shallow-buried metro in Tashkent city. V International Scientific Conference “Construction Mechanics, Hydraulics and Water Resources Engineering” (CONMECHYDRO-2023, Tashkent). E3S Web of Conferences. 2023; (401):01062. DOI:10.1051/e3sconf/202340101062. Available at: https://www.e3s-conferences.org/articles/e3sconf/pdf/2023/38/e3sconf_conmechhydro23_01062.pdf.
11. **Ozturk K.F.** Investigation of dynamic responses of three-sided underpass culvert under nearfault and far-fault ground motions considering soil-structure interaction. Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 2024; (177):108446. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0267726123006917>.

12. **Falletta S., Monegato G.** Exact nonreflecting boundary conditions for exterior wave equation problems. *Publications de l'Institut Mathématique nouvelle s'Erie*. 2014; (96):103–123. DOI:10.2298/PIM1410103F. Available at: <https://doiserbia.nb.rs/img/doi/0350-1302/2014/0350-13021410103F.pdf>.
13. **Mirzaev I., Shomurodov J.F.** Unsteady waves in an extended underground pipeline under seismic action. *Computational Technologies*. 2023; 28(3):10–24. DOI:10.25743/ICT.2023.28.3.002. (In Russ.)
14. **Mirzaev I., Gaynazarov S.** Effect of the depth of circular lining in an elastic medium with transparent boundary under the impact of seismic waves. *International Conference "Ensuring Seismic Safety and Seismic Stability of Buildings and Structures, Applied Problems of Mechanics"*. May 27–29 2024, Tashkent, Uzbekistan. *AIP Conf. Proc.* 2024; (3265). DOI:10.1063/5.0266835. Available at: <https://pubs.aip.org/aip/acp/article-abstract/3265/1/030005/3342304/Effect-of-the-depth-of-circular-lining-in-an?redirectedFrom=fulltext>.
15. **Mirzaev I., Gaynazarov S.** Impact of plane waves on lining in elastic medium with transparent artificial boundary. *WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics*. 2025; (20):31–40. DOI:10.37394/232011.2025.20.4. Available at: [https://wseas.com/journals/mechanics/2025/a085111-004\(2025\).pdf](https://wseas.com/journals/mechanics/2025/a085111-004(2025).pdf).
16. **Kuznetsov S.V., Terentyeva E.O.** Lamb's plane internal problem: waves in the epicentral zone from a vertical power source. *Acoustic Journal*. 2015; 61(3):387–399. Available at: https://www.researchgate.net/publication/276100584_Ploskaa_vnutrennaa_zadaca_Lemba_volny_v_epicentralnoj_zone_ot_vertikalnogo_silovogo_istocnika. (In Russ.)
17. **Zienkiewicz O.C., Morgan K.** *Finite elements and approximation*. N.Y.: Courier Corporation; 2013: 352.
18. **Bathe K.J.** *Finite element procedure*. Second edition. Watertown, MA; 2016: 1051.
19. **Hecht F., Pironneau O., Le Hyaric A., Ohtsuka K.** *FreeFem++*. Fourth edition, Version 4.15. Paris: Laboratoire Jacques-Louis Lions, Sorbonne University; 710. Available at: <https://freefem.org>.
20. **Novozhilov V.V.** *Teoriya uprugosti [Theory of elasticity]*. Leningrad: Sudpromgiz; 1958: 371. (In Russ.)